令和 6 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）

教　育　学　部

・試験開始までに下の（注意事項）をよく読んでください。ただし，この冊子を開いてはいけません。
・筆記用具は試験開始まで手にとってはいけません。

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図の後，すぐに用紙の種類と枚数（4 枚）を確かめて，すべての用紙に受験番号を記入してください。この配布物には，次の計 4 枚が含まれています。

   令和 6 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）
   令和 6 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 1）
   令和 6 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 2）
   令和 6 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 3）

2. 試験終了後，配布されたすべての用紙を回収します。
3. 配布された用紙が上記 1 と異なっているときや印刷が不鮮明なときには，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 各「試験問題・答案用紙」の右下隅にある小計の欄には何も記入してはいけません。
5. 解答を書ききれないときは，その問題が記載してある用紙の裏面を利用してもかまいません。その場合は，問題記載の面の右下方に「裏面使用」と記入してください。

（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）

受　験　番　号

問題 1　次の問いに答えよ。答えだけでなく，どのように考えたのか，途中の計算および説明も書け。

(1) 水平な地面に垂直に建つ塔がある。目の高さが 1.5 m の人が，塔の先端の真下の地点 A から 25 m 離れた地点で計測した塔の先端の仰角は θ であり，地点 A から 10 m 離れた地点での仰角は 2θ であった。m を単位として塔の高さを小数第 1 位まで求めよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ。必要があれば，近似値として $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{5}=2.236$, $\sqrt{7}=2.646$ を用いよ。

(2) $0<x\leqq 4,\ 1\leqq y,\ \dfrac{y}{x}=64$ のとき，$z=(\log_2 x)(\log_2 y)$ の最小値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+a_n^2}\ (n=1,2,3,\cdots)$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。

解答例

(1) 塔の高さから 1.5 m を差し引いた長さを x m とする。最初の計測から $\tan\theta=\dfrac{x}{25}$ がわかり，次の計測から $\tan 2\theta=\dfrac{x}{10}$ がわかる。一方，$t=\tan\theta$ とおくと，条件より $t>0$ であり，倍角の公式から $\tan 2\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$ となるので，$t=\dfrac{x}{25}$, $\dfrac{2t}{1-t^2}=\dfrac{x}{10}$ を得る。これらの式から x を消去すると，$25t(1-t^2)=20t$ よって，$t>0$ から $t=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ がわかる。これから，$x=25t=5\sqrt{5}$ となり，求める塔の高さは，$1.5+5\sqrt{5}$ と求められる。ここで，近似値 $\sqrt{5}=2.236$ を使って計算し，小数点第 2 位を四捨五入し小数第 1 位まで求めると，塔の高さは，12.7 m である。

(2) 条件から $y=64x$ で，両辺の 2 を底とする対数をとると，$64=2^6$ なので，$\log_2 y=6+\log_2 x$ である。$X=\log_2 x, Y=\log_2 y$ とおくと，$Y=X+6$ であり，x,y の範囲から $X\leqq 2,\ Y\geqq 0$ である。これから，$-6\leqq X\leqq 2$ がわかる。この範囲で，$z=XY=X(X+6)=(X+3)^2-9$ の 値の最小値は -9 であり，それは $X=-3, Y=3$ のときである。これは，$x=\dfrac{1}{8}, y=8$ のときである。以上より，$x=\dfrac{1}{8},\ y=8$ のときに z は最小値 -9 となる。

(3) 与えられた漸化式より $a_{n+1}^2=\dfrac{1}{4}(1+a_n^2)$ となるので，$b_n=a_n^2$ とおけば，$b_1=a_1^2=\dfrac{1}{2},\ b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{1}{4}$ となる。

これから，$b_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left(b_n-\dfrac{1}{3}\right)$ となり，

$$b_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(b_1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

となる。ここで，初項の値と漸化式より明らかに $a_n>0$ であるから，

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}}$$

である。

（教育　数学I・A・II・B その1）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 2　関数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \int_0^x t|t-1|dt$ について，次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
(2) $f(3)$ を求めよ。
(3) a を実数とし，$x \geqq 0$ の範囲で x についての方程式 $f(x) = a$ を考える。このとき異なる実数解の個数を求めよ。

解答例

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \int_0^x t\{-(t-1)\}dt = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$$

従って

$$f'(x) = x^2 + 3$$

であり，最大値は $x = 1$ のとき $f(1) = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$，最小値は $x = 0$ のとき $f(0) = 0$ である。

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$

(2)

$$f(3) = \frac{9}{2} + 9 - \int_0^3 t|t-1|dt = \frac{27}{2} - \left\{\int_0^1 t\{-(t-1)\}dt + \int_1^3 t(t-1)dt\right\} = \frac{27}{2} - \left\{\left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_1^3\right\}$$

$$= \frac{27}{2} - \left\{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{26}{3}$$

(3) $1 \leqq x$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \left\{\int_0^1 t\{-(t-1)\}dt + \int_1^x t(t-1)dt\right\} = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \left\{\left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_1^x\right\}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x - \left\{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

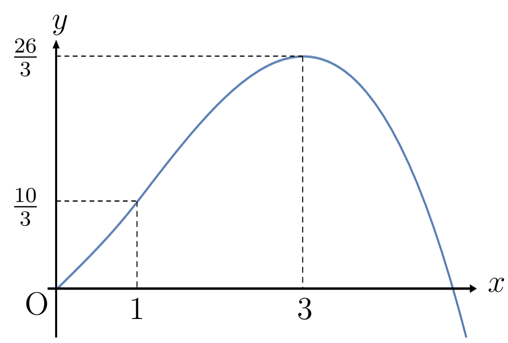
$$= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - \frac{1}{3}$$

従って $f'(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x-3)(x+1)$ であり，$1 \leqq x$ における増減表は，

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frac{10}{3}$	$\nearrow$	$\frac{26}{3}$	$\searrow$

(1) の結果と合わせて $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ のグラフを考えることにより異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & \left(\frac{26}{3} < a\right) \\ 1 & \left(a = \frac{26}{3}\right) \\ 2 & \left(0 \leqq a < \frac{26}{3}\right) \\ 1 & (a < 0) \end{cases}$$



（教育　数学 I・A・II・B その 2）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受　験　番　号

小　　計

令和 6 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教育　数学 I・A・II・B その 3）

問題 3　1 辺の長さが 2 である正四面体 OABC について，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を D, 辺 BC を 3 : 1 に内分する点を E とし，線分 AE と線分 CD の交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表し，大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ を求めよ。

(2) $\triangle$OAF の面積 S を求めよ。

(3) 辺 OA の中点を M とする。辺 OB 上に点 P を，辺 OC 上に点 Q をとる。$\triangle$MPQ の重心 G が線分 OF 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表し，$\triangle$OMG の面積 S' を求めよ。

解答例

(1) 問題文の条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{\vec{b} + 3\vec{c}}{4}$ である。AF : FE $= s : (1-s)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = (1-s)\vec{a} + s \cdot \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{4} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{b} + \frac{3}{4}s\vec{c}$$

と表される。また，DF : FC $= t : (1-t)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = t\vec{c} + (1-t) \cdot \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{2}{3}(1-t)\vec{a} + \frac{1}{3}(1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される。このとき，O, A, B, C は同一平面上にないので，

$$1 - s = \frac{2}{3}(1-t), \quad \frac{1}{4}s = \frac{1}{3}(1-t), \quad \frac{3}{4}s = t$$

である。これより $s = \dfrac{2}{3}$, $t = \dfrac{1}{2}$ を得る。よって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{6}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$ となる。$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2 = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$ であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|^2 = \frac{1}{36}(4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 9|\vec{c}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{b} \cdot \vec{c} + 12\vec{c} \cdot \vec{a}) = \frac{1}{36}(4 \cdot 4 + 4 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 12 \cdot 2) = \frac{25}{9}$$

となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}| = \dfrac{5}{3}$ を得る。

(2) $\angle \mathrm{AOF} = \theta$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OF}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OF}}|\cos\theta = 2 \times \dfrac{5}{3}\cos\theta$ であり，また $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{a} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{6}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}\right) = \dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2 + \dfrac{1}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{8}{3}$ であるから，$\dfrac{10}{3}\cos\theta = \dfrac{8}{3}$ より $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ を得る。ゆえに $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ なので，

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OF}}|\sin\theta = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = 1$$

である。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = y\vec{c}$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + x\vec{b} + y\vec{c}\right)$$

であり， G が直線 OF 上にあることから，定数 k が存在して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OF}} = k\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

である。よって，$\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}k$, $\dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{6}k$, $\dfrac{1}{3}y = \dfrac{1}{2}k$ から， $x = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{3}{4}$ を得る。ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{6}\vec{a} + \dfrac{1}{12}\vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{c}$ となる。このとき，$k = \dfrac{1}{2}$ であるので，G は線分 OF の中点である。ゆえに$\triangle$ OMG と $\triangle$ OAF は相似であり，相似比は 1 : 2 である。よって面積比は 1 : 4 なので，(2) から $S' = \dfrac{1}{4}$ である。

（教育　数学 I・A・II・B その 3）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受　験　番　号

小　　計